www.tunisie-etudes.info

Ce document a été téléchargé depuis
www.tunisie-etudes.info

Des documents gratuits, devoirs, examens, cours, exercices, corrigés... Ainsi que toute une rubrique pour vous aider à trouver un emploi sans oublier les avis de concours en direct

Notre page Twitter :
http://www.twitter.com/TunisieEtudes
Notre page FaceBook :
http://www.facebook.com/TunisieEtudes



Merci d'avoir choisi www.tunisie-etudes.info
Bonne lecture et bon travail

CHAMBRE DE COMMERCE ET D'INDUSTRIE DE PARIS
DIRECTION DE L'ENSEIGNEMENT
Direction des Admissions et Concours

École Supérieure de Commerce de Paris
CONCOURS D'ADMISSION DE 1990

Mathématiques I

OPTION GÉNÉRALE

Lundi 7 mai 1990, de 8 h. à 12 h.

La présentation, la lisibilité, l'orthographe, la qualité de la rédaction, la clarté et la précision des raisonnements entreront pour une part importante dans l'appréciation des copies.

sont autorisées : règles graduées, tables de valeurs numériques **sans formulaire**, calculatrices de poche, y compris les calculatrices programmables et alphanumériques, à fonctionnement autonome, sans imprimante, sans document d'accompagnement et de format maximum 21 cm de long × 15 cm de large, à raison d'une seule calculatrice par candidat.

Soit f une application continue de $[a, b]$ dans $\mathbb{R}$, avec $a < b$. L'objet du problème est l'étude d'approximations de l'intégrale :

$$J = \int_a^b f(x)\,dx$$

par la méthode des rectangles, c'est-à-dire par la suite $(u_n)_{n\geq 1}$ définie par :

$$u_n = \frac{b-a}{n}\sum_{k=0}^{n-1} f(x_k), \quad \text{avec :} \quad x_k = a + k\,\frac{b-a}{n}, \quad 0 \leq k \leq n,$$

puis, de façon plus performante, par les suites $(v_n)_{n\geq 1}$ et $(w_n)_{n\geq 1}$ définies par :

$$v_n = 2\,u_{2n} - u_n \qquad \text{et} \qquad w_n = \frac{4\,v_{2n} - v_n}{3}.$$

PARTIE I : Étude d'un premier exemple

Dans cette partie, on suppose que $[a, b] = [0, 1]$ et que : $\quad f(x) = \dfrac{4}{1+x^2}$.

1. Écrire en PASCAL un algorithme de calcul de u_n lorsque l'entier naturel non nul n est donné.
À l'aide de cet algorithme, remplir le tableau suivant :

u_1	v_1	w_1
u_2	v_2	w_2
u_4	v_4	w_4
u_8	v_8	
u_{16}		

(On donnera les résultats numériques de ce tableau avec six décimales.)

2. Calculer l'intégrale J. (On pourra poser $x = \tan t$.)
Évaluer la précision des résultats numériques obtenus ci-dessus.

PARTIE II : Étude d'un second exemple

Dans cette partie, on considère un réel λ strictement positif et différent de 1.
On suppose que $[a, b] = [0, \pi]$ et que : $\quad f(x) = \ln\left(\lambda^2 - 2\,\lambda\cos x + 1\right)$.

1. Soit n un entier naturel non nul.

a) Déterminer sous forme trigonométrique les racines dans $\mathbf{C}$ de l'équation : $\quad y^{2n} - 1 = 0$.

b) En déduire, en comparant leurs coefficients dominants et leurs racines, l'égalité suivante entre fonctions polynômes :

$$y^{2n} - 1 = (y^2 - 1)\prod_{k=1}^{n-1}\left(y^2 - 2\,y\cos\frac{k\,\pi}{n} + 1\right).$$

.../...

2. a) Déduire de la question précédente une expression simplifiée de u_n et de v_n.

b) En distinguant les cas $\lambda < 1$ et $\lambda > 1$, calculer l'intégrale J en déterminant la limite de la suite (u_n), puis donner des équivalents de $u_n - J$ et de $v_n - J$.

PARTIE III : Étude du cas général

On suppose désormais que la fonction f est de classe C^4 sur $[a, b]$. Pour tout nombre entier naturel k tel que $1 \leq k \leq 4$, on pose :

$$M_k = \sup_{a \leq x \leq b} \left| f^{(k)}(x) \right|.$$

(On rappelle que la notation $f^{(k)}$ désigne la dérivée $k^{ième}$ de la fonction f.)

1. Soit $[\alpha, \beta]$ un segment inclus dans $[a, b]$. On considère la fonction auxiliaire p définie sur $[\alpha, \beta]$ par la relation :

$$p(x) = \int_\alpha^x f(t)\, dt - (x - \alpha)\, f(\alpha).$$

a) Calculer les deux premières dérivées de p.

b) Montrer que, pour tout élément x de $[\alpha, \beta]$, on a : $\quad -M_1 \leq p''(x) \leq M_1$.

En déduire par intégration un encadrement de $p(x)$ pour $\alpha \leq x \leq \beta$, puis établir l'inégalité suivante :

$$\left| \int_\alpha^\beta f(t)\, dt - (\beta - \alpha)\, f(\alpha) \right| \leq \frac{(\beta - \alpha)^2}{2} M_1.$$

c) En appliquant cette inégalité aux segments $[x_k, x_{k+1}]$ pour $0 \leq k \leq n - 1$, prouver enfin que :

$$|J - u_n| \leq \frac{(b - a)^2}{2\, n} M_1.$$

2. Soit $[\alpha, \beta]$ un segment inclus dans $[a, b]$. On considère la fonction auxiliaire q définie sur $[\alpha, \beta]$ par la relation :

$$q(x) = p(x) - \frac{(x - \alpha)[f(x) - f(\alpha)]}{2}.$$

a) Calculer les deux premières dérivées de q.

b) Établir l'inégalité suivante :

$$\left| \int_\alpha^\beta f(t)\, dt - (\beta - \alpha)\, f(\alpha) - \frac{(\beta - \alpha)[f(\beta) - f(\alpha)]}{2} \right| \leq \frac{(\beta - \alpha)^3}{12} M_2.$$

(On pourra encadrer $q''(x)$ pour $\alpha \leq x \leq \beta$, puis, par intégration, en déduire un encadrement de $q(x)$.)

c) Prouver enfin que : $\quad \left| J - u_n - \dfrac{(b - a)[f(b) - f(a)]}{2\, n} \right| \leq \dfrac{(b - a)^3}{12\, n^2} M_2.$

3. On considère cette fois la fonction auxiliaire r définie sur $[\alpha, \beta]$ par la relation :

$$r(x) = q(x) + \frac{(x - \alpha)^2[f'(x) - f'(\alpha)]}{12}.$$

En procédant encore de la même manière, établir que :

$$\left| J - u_n - \frac{(b - a)[f(b) - f(a)]}{2\, n} + \frac{(b - a)^2[f'(b) - f'(a)]}{12\, n^2} \right| \leq \frac{(b - a)^5}{720\, n^4} M_4.$$

4. Déterminer à l'aidee des résultats précédents le développement limité à l'ordre 3 de u_n, c'est-à-dire des nombres réels A, B, C et D tels que :

$$u_n = A + \frac{B}{n} + \frac{C}{n^2} + \frac{D}{n^3} + \frac{\varepsilon_n}{n^3} \qquad \text{avec :} \qquad \lim_{n \to +\infty} \varepsilon_n = 0.$$

En déduire les développements limités à l'ordre de 3 de v_n et de w_n. Conclure.

www.tunisie-etudes.info

Ce document a été téléchargé depuis
www.tunisie-etudes.info

Des documents gratuits, devoirs, examens, cours, exercices, corrigés... Ainsi que toute une rubrique pour vous aider à trouver un emploi sans oublier les avis de concours en direct

Notre page Twitter :
http://www.twitter.com/TunisieEtudes
Notre page FaceBook :
http://www.facebook.com/TunisieEtudes



Merci d'avoir choisi www.tunisie-etudes.info
Bonne lecture et bon travail